

САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ОТЧЕТ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ЗАОЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ
SamRAS-2014
СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ
заочный тур № ____.

Исполнитель:

Иванов Александр

Статус:

ученик 11 класса

Учреждение:

Самарский областной
лицей.

Самара, 2013 г.

Задача № 1. «Система "WASP-12-WASP-12b"»

Условие. У звезды WASP-12 в 2008 году в рамках проекта SuperWASP была обнаружена планета – WASP-12b, подобная Юпитеру. Период обращения планеты оказался экстремально малым, всего лишь 1.0914 сут. Из наблюдений известно, что масса звезды WASP-12 равна $\mathcal{M}_* = 1.599 \cdot \mathcal{M}_\odot$, где $\mathcal{M}_\odot = 1.989 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца, светимость звезды $L_* = 3.60 \cdot L_\odot$, где $L_\odot = 3.85 \cdot 10^{26}$ Вт. Определить радиус орбиты планеты в астрономических единицах и ее орбитальную скорость, полагая, что последняя является круговой и масса планеты много меньше массы звезды. Оценить ее эффективную температуру поверхности.

<p>Дано:</p> <p>$P = 1.0914$ сут = $9.430 \cdot 10^4$с, $\mathcal{M}_* = 1.599 \cdot \mathcal{M}_\odot =$ $3.180 \cdot 10^{30}$ кг, $L_* = 3.60 \cdot L_\odot =$ $1.386 \cdot 10^{27}$ Вт,</p> <hr/> <p>Найти:</p> <p>$r, V, T_{\text{eff}} - ?$</p>	<p>Решение:</p> <p>Звезда WASP-12 вместе со своей планетой WASP-12b образует систему физически связанных (гравитирующих) тел, притягивающихся друг к другу благодаря гравитационному взаимодействию. Такая пара тел, в общем случае, должна двигаться вокруг центра масс по подобным траекториям (в данном случае – окружностям).</p> <p>Однако, в силу условия задачи – "масса планеты (\mathcal{M}_P) много меньше массы звезды (\mathcal{M}_*)" (т.е. $\mathcal{M}_P \ll \mathcal{M}_*$), можно полагать, что центр масс системы совпадает с центром звезды и планета движется вокруг последней по окружности (см. рис. 1).</p>
--	--

Запишем второй закон Ньютона для планеты WASP-12b, движущейся по круговой орбите:

$$\mathcal{M}_P \vec{a} = - \frac{G \mathcal{M}_P \mathcal{M}_*}{r^3} \vec{r}. \quad (1)$$

здесь \vec{a} – вектор центростремительного ускорения экзопланеты, $G = 6.673 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² – гравитационная постоянная, \vec{r} – радиус-вектор планеты, проведенный из центра звезды (астроцентрический); в случае круговой орбиты его величина есть радиус орбиты планеты r .

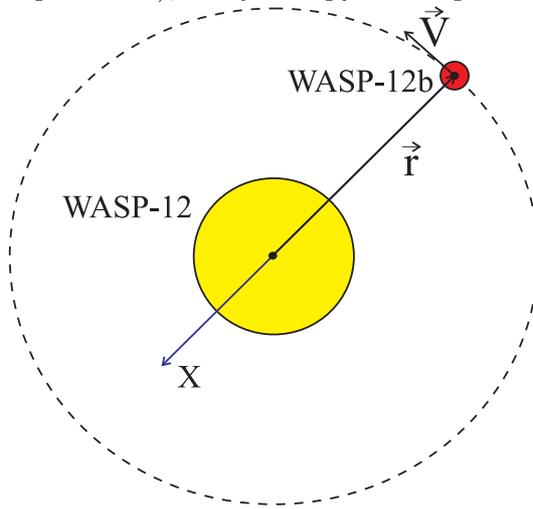


Рис. 1. К определению орбиты экзопланеты WASP-12b.

В проекции на ось X , определяемую направлением "планета-звезда", уравнение (1) можно представить в виде:

$$a = \frac{G \mathcal{M}_*}{r^2}. \quad (2)$$

Согласно определению, величина центростремительного ускорения экзопланеты есть

$$a = \frac{V^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{P^2}, \quad \text{где } V = \frac{2\pi r}{P}. \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) следует, что

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \mathcal{M}_* P^2}{4\pi^2}}. \quad (4)$$

Выполним размерный анализ искомой величины:

$$[r] = \sqrt[3]{[G][\mathcal{M}_*][P^2]} = \sqrt[3]{\left(\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}\right) \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^2} = \left(\text{Н} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}\right) = \sqrt[3]{\text{м}^3} = \text{м}. \quad \text{— Верно!}$$

Выполним численный расчет искомой величины:

$$r = \sqrt[3]{\frac{6.673 \cdot 10^{-11} \cdot 3.180 \cdot 10^{30} \cdot (9.430 \cdot 10^4)^2}{4\pi^2}} = 3.629 \cdot 10^9 \text{ м} = 0.024 \text{ а.е.}$$

. здесь учтено что $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$. Тогда орбитальная скорость движения, согласно (3), представляется в виде:

$$V = \frac{2\pi \cdot 3.629 \cdot 10^9 \text{ м}}{9.430 \cdot 10^4 \text{ с}} = 241.8 \text{ км/с}.$$

Эффективную температуру поверхности экзопланеты можно оценить, используя уравнение теплового баланса, а именно энергия излучения звезды, поглощаемая экзопланетой (W_{abs}) за единицу времени, равна количеству энергии, излучаемой ей в окружающее пространство (W_{rad}) за то же время:

$$W_{abs} = W_{rad}. \quad (5)$$

Энергию W_{abs} можно представить как

$$W_{abs} = \mathcal{I} \cdot \pi \cdot R^2, \text{ где } \mathcal{I} = \frac{L_*}{4\pi r^2}, \quad (6)$$

здесь \mathcal{I} – интенсивность излучения звезды, на орбите планеты, R – радиус экзопланеты. Полагая, что экзопланета есть абсолютно черное тело (что, собственно говоря, весьма адекватно действительности), воспользуемся законом Стефана-Больцмана и представим W_{rad} в виде:

$$W_{rad} = \sigma T_{\text{eff}}^4 \cdot 4\pi \cdot R^2. \quad (7)$$

здесь $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – постоянная Стефана-Больцмана. Из уравнений (5)-(7) следует, что

$$T_{\text{eff}} = \sqrt[4]{\frac{L_*}{16\pi \sigma r^2}} = \sqrt[4]{\frac{1.386 \cdot 10^{27} \text{ Вт}}{16\pi \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4) \cdot (3.629 \cdot 10^9 \text{ м})^2}} = 2465 \text{ К}. \quad (8)$$

Ответ: радиус орбиты планеты WASP-12b равен 0.024 а.е., ее орбитальная скорость движения равна 241.8 км/с, эффективная температура – 2465 К.

Замечание: решение задачи можно было найти иначе, используя третий закон Кеплера, для системы WASP-12b и для системы "Солнце- Земля". Однако для использования последнего необходимо помнить, что среднее расстояние от Солнца до Земли равно 1 а.е. и продолжительность земного года равна 365.2422 сут.

