

САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ОТЧЕТ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ  
ЗАОЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ  
SamRAS-2014  
СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ  
заочный тур № \_\_\_\_.

Исполнитель:

*Иванов Александр*

Статус:

ученик 11 класса

Учреждение:

Самарский областной  
лицей.

Самара, 2013 г.

### Задача № 1. «Система "WASP-12-WASP-12b"»

**Условие.** У звезды WASP-12 в 2008 году в рамках проекта SuperWASP была обнаружена планета – WASP-12b, подобная Юпитеру. Период обращения планеты оказался экстремально малым, всего лишь 1.0914 сут. Из наблюдений известно, что масса звезды WASP-12 равна  $\mathcal{M}_* = 1.599 \cdot \mathcal{M}_\odot$ , где  $\mathcal{M}_\odot = 1.989 \cdot 10^{30}$  кг – масса Солнца, светимость звезды  $L_* = 3.60 \cdot L_\odot$ , где  $L_\odot = 3.85 \cdot 10^{26}$  Вт. Определить радиус орбиты планеты в астрономических единицах и ее орбитальную скорость, полагая, что последняя является круговой и масса планеты много меньше массы звезды. Оценить ее эффективную температуру поверхности.

#### Дано:

$$\begin{aligned} P &= 1.0914 \text{ сут} = \\ &= 9.430 \cdot 10^4 \text{ с}, \\ \mathcal{M}_* &= 1.599 \cdot \mathcal{M}_\odot = \\ &= 3.180 \cdot 10^{30} \text{ кг}, \\ L_* &= 3.60 \cdot L_\odot = \\ &= 1.386 \cdot 10^{27} \text{ Вт}, \end{aligned}$$

#### Найти:

$$r, V, T_{\text{eff}} - ?$$

#### Решение:

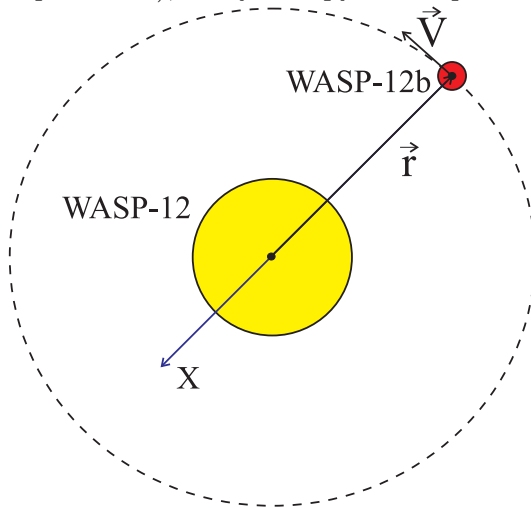
Звезда WASP-12 вместе со своей планетой WASP-12b образует систему физически связанных (гравитирующих) тел, притягивающихся друг к другу благодаря гравитационному взаимодействию. Такая пара тел, в общем случае, должна двигаться вокруг центра масс по подобным траекториям (в данном случае – окружностям).

Однако, в силу условия задачи – "масса планеты ( $\mathcal{M}_P$ ) много меньше массы звезды ( $\mathcal{M}_*$ )" (т.е.  $\mathcal{M}_P \ll \mathcal{M}_*$ ), можно полагать, что центр масс системы совпадает с центром звезды и планета движется вокруг последней по окружности (см. рис. 1).

Запишем второй закон Ньютона для планеты WASP-12b, движущейся по круговой орбите:

$$\mathcal{M}_P \vec{a} = -\frac{G \mathcal{M}_P \mathcal{M}_*}{r^3} \vec{r}. \quad (1)$$

здесь  $\vec{a}$  – вектор центростремительного ускорения экзопланеты,  $G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$  – гравитационная постоянная,  $\vec{r}$  – радиус-вектор планеты, проведенный из центра звезды (астроцентрический); в случае круговой орбиты его величина есть радиус орбиты планеты  $r$ .



В проекции на ось  $X$ , определяемую направлением "планета-звезда", уравнение (1) можно представить в виде:

$$a = \frac{G \mathcal{M}_*}{r^2}. \quad (2)$$

Согласно определению, величина центростремительного ускорения экзопланеты есть

$$a = \frac{V^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{P^2}, \text{ где } V = \frac{2\pi r}{P}. \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) следует, что

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \mathcal{M}_* P^2}{4\pi^2}}. \quad (4)$$

Рис. 1. К определению орбиты экзопланеты WASP-12b.

Выполним размерный анализ искомой величины:

$$[r] = \sqrt[3]{[G][\mathcal{M}_*][P^2]} = \sqrt[3]{\left(\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}\right) \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^2} = \left(\text{Н} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}\right) = \sqrt[3]{\text{м}^3} = \text{м}. \quad \text{Верно!}$$

Выполним численный расчет искомой величины:

$$r = \sqrt[3]{\frac{6.673 \cdot 10^{-11} \cdot 3.180 \cdot 10^{30} \cdot (9.430 \cdot 10^4)^2}{4\pi^2}} = 3.629 \cdot 10^9 \text{ м} = 0.024 \text{ а.е.}$$

. здесь учтено что  $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м.}$  Тогда орбитальная скорость движения, согласно (3), представляется в виде:

$$V = \frac{2 \pi \cdot 3.629 \cdot 10^9 \text{ м}}{9.430 \cdot 10^4 \text{ с}} = 241.8 \text{ км/с.}$$

Эффективную температуру поверхности экзопланеты можно оценить, используя уравнение теплового баланса, а именно энергия излучения звезды, поглощаемая экзопланетой ( $W_{abs}$ ) за единицу времени, равна количеству энергии, излучаемой ей в окружающее пространство ( $W_{rad}$ ) за то же время:

$$W_{abs} = W_{rad}. \quad (5)$$

Энергию  $W_{abs}$  можно представить как

$$W_{abs} = \mathcal{I} \cdot \pi \cdot R^2, \text{ где } \mathcal{I} = \frac{L_*}{4\pi r^2}, \quad (6)$$

здесь  $\mathcal{I}$  – интенсивность излучения звезды, на орбите планеты,  $R$  – радиус экзопланеты. Полагая, что экзопланета есть абсолютно черное тело (что, собственно говоря, весьма адекватно действительности), воспользуемся законом Стефана-Больцмана и представим  $W_{rad}$  в виде:

$$W_{rad} = \sigma T_{\text{eff}}^4 \cdot 4 \pi \cdot R^2. \quad (7)$$

здесь  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – постоянная Стефана-Больцмана. Из уравнений (5)-(7) следует, что

$$T_{\text{eff}} = \sqrt[4]{\frac{L_*}{16\pi \sigma r^2}} = \sqrt[4]{\frac{1.386 \cdot 10^{27} \text{ Вт}}{16\pi \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4) (3.629 \cdot 10^9 \text{ м})^2}} = 2465 \text{ К.} \quad (8)$$

**Ответ:** радиус орбиты планеты WASP-12b равен 0.024 а.е., ее орбитальная скорость движения равна 241.8 км/с, эффективная температура – 2465 К.

**Замечание:** решение задачи можно было найти иначе, используя третий закон Кеплера, для системы WASP-12b и для системы "Солнце- Земля". Однако для использования последнего необходимо помнить, что среднее расстояние от Солнца до Земли равно 1 а.е. и продолжительность земного года равна 365.2422 сут.